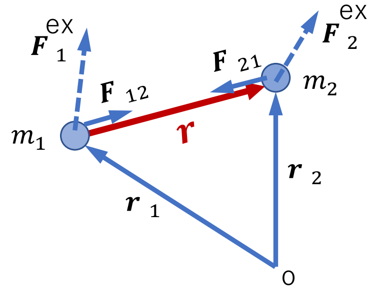
6　質点系の力学 I （二体問題と惑星の運動）

一般に、たくさんの質点からなり互いに相互作用を及ぼし合っているような系の運動は「多体問題 (many body problem)」と言って、解析的には解けない。「たくさんの質点」と書いたが、実は３つの質点の運動の問題「３体問題」においてすら、特別な状況でしか解析的に解けなく、４つ以上では数値計算に頼るしか無くなる。しかし、全く運動の様子が不明かというと、そうではなく、重心の運動と重心の周りの相対運動に分離して考えることが可能である。この章では、２体問題を扱う。この場合は、重心の運動を分離し、片方の質点から相手を見るような相対位置ベクトルと、換算質量を導入することで、実質、１体問題に還元することが可能である。最初に、一般的に二体問題を扱ったあと、具体例として、「太陽と惑星の二体問題」を、これまでの知識を活用して実際に解いて見ることにする。

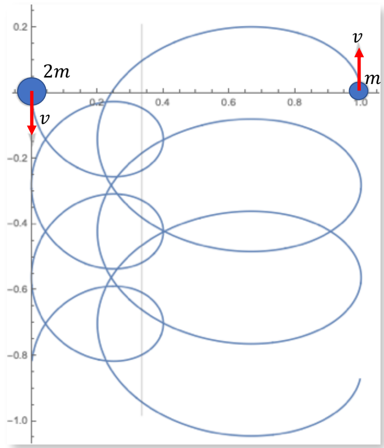
6.1　二体運動



右図のように、質量 m_1の質点1と質量 m_2の質点2からなる系 (system) を考える。二つの質点間には万有引力 $\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{21}$ が働いている（作用反作用の法則（1-4節参照）より、$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ が成り立つ）。この系の中で働く力なので、$\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{21}$ は「内力 (internal force)」と呼ばれる。さらに、系の外から「外力 (external force)」$\mathbf{F}_1^{ex}$、$\mathbf{F}_2^{ex}$ がそれぞれ質点１、質点２に働いているとする。外力は「外の」という意味の external の最初の２文字を肩に付けて表すことにする。

この二つの質点からなる系の運動方程式をそのまま書き下すと、

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{ex} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2^{ex} \end{cases} \qquad (6\text{-}1\text{-}1)$$



となる。式(6-1-1)は連立微分方程式になっている。質点１、２が動き回ると、お互いの間に働く力も変化するので、独立にはその解が決まらない。片方の質点の質量が他方の質量より充分大きければ、片方の質点の周りを他方の質点が回る、という運動となるだろうが、同じ程度の質量からなっているとすると、お互いがお互いの周りを回るといった複雑な運動となる。（重心の周りを周る。重心については後で述べる。）

そのような例を右の図に示した。横軸をx、縦軸をyとしたxy平面を考える。この図は、原点と(1,0)の座標に質量２：１の質点を置き、初速度を原点の質点には-y方向に、(1,0)の質点には+y方向に同じ大きさ (v) で与えた時の運動の軌跡である[1]。

さて、このような運動を見通し良くするために、「重心の運動」と、片方の質点の上に乗って相手を見るような「相対運動」に分離して考える。すると、２体問題は１体問題に還元できることを示せる。以下、系全体の性質としてわかることを調べた後、重心を導入することにする。

1外力がない場合の式(6-1-1)をMathematicaで数値計算した。

まず、式(6-1-1)の２つの式を足し合わせた式を作る。

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} \qquad (6\text{-}1\text{-}2)$$

ここで、 $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ （作用・反作用の法則）を使い、外力の総和を $\mathbf{F}_{tot}^{ex} \equiv \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex}$ （tot は total の略）と書くことにすると、式(6-1-2)は、

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (6\text{-}1\text{-}3)$$

となる。

二つの質点の運動量を、$\mathbf{p}_1 = m_1\dot{\mathbf{r}}_1$ 、$\mathbf{p}_2 = m_2\dot{\mathbf{r}}_2$ 、全運動量（運動量の総和）を $\mathbf{P}_{tot} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2$ とするならば、式(6-1-3)の左辺は、$\mathbf{P}_{tot}$ を時間で１階微分したもので書けるから、

$$\frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (6\text{-}1\text{-}4)$$

が得られる。１個の質点の場合、運動量の時間変化はその質点に働いている力（１個の質点なので全ての力は外力とみなせる）に等しくなる。すなわち、

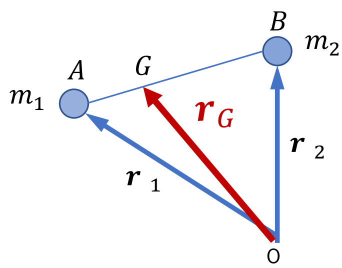
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \qquad (6\text{-}1\text{-}5)$$

これは、Newtonの運動方程式を運動量を使って書き表したものであった（$m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$）。二体問題の場合は、式(6-1-4)で表されるように「系全体の運動量（全運動量）」の時間変化が「外力の総和（全外力）」で決まることを示している[2]。**ここで質点間に働く内力には全く無関係**であることに注意しよう。もし、**外力の総和がゼロであるならば全運動量は一定となる（全運動量は保存する）**。

6-1-1 重心（質量中心）の運動

ここで、重心 (center of gravity)[3]を導入する。右図のように質量 m_1の質点と質量 m_2の質点があった時、その重心を $\mathbf{r}_G$ と書くことにすると、重心は

$$\mathbf{r}_G \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (6\text{-}1\text{-}6)$$



と定義される。幾何学的に言うと重心 $\mathbf{r}_G$ は、質点どうしを結ぶ直線ABを$m_2 : m_1$ の比に内分した点Gに当たる。例えば、$m_1 = m_2$ なら重心はABの中点に、$m_1 \gg m_2$ なら、m_1 にずっと寄ったところになる[4]。

---

[2] ３体以上のN体問題でも同じことを示せる。次章で取り扱う。

[3] 重心は「質量中心 (center of mass)」という言い方もする。重力が無くても質量は存在するのであるから、質量中心の方が適切な用語だと思われる。本講義では、しかしながら、２文字ですみ、また、慣れ親しんだ「重心」という言葉を使うことにしたい。

[4] もし、わかりづらければ実際に質量に値を入れて作図して見ると良い。

重心の運動を見るために、(6-1-6)の時間微分をとると、

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{M} \qquad (6\text{-}1\text{-}7)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_G = \frac{m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2}{M} \qquad (6\text{-}1\text{-}8)$$

となる。ここで、全質量 $m_1 + m_2$ をM と書いた。式(6-1-8)は、先ほど求めた式(6-1-3)を使うと

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (6\text{-}1\text{-}9)$$

となる。これを見ると、重心の運動は、**重心の位置に全ての質量Mが集まったとし、外力の総和のみがあるとした場合の運動方程式で決まる**（内力に無関係）ことを意味している。したがって、もし、**外力の総和がゼロの場合、重心は静止しているか等速直線運動をする**ことがわかる。

6-1節で最初から２番目の図（外力がない場合の二体問題のシミュレーション図）を見ると、その重心の最初の位置（質量比が2:1だったので、最初は(1/3, 0)の点にあった）のx座標は変化していないことが見て取れる（図中の直線で示してある）。
重心の初期速度は $\dot{\mathbf{r}}_G = (2m\dot{\mathbf{r}}_1 + m\dot{\mathbf{r}}_2)/3m = (2/3)(-v)\mathbf{e}_y + (1/3)v\,\mathbf{e}_y = (-1/3)v\,\mathbf{e}_y$であるから、重心は、この速度のままy軸負の方向に等速直線運動する。

なお、式(6-1-7)から、次のこともわかる。

$$\mathbf{P}_G \equiv M\dot{\mathbf{r}}_G = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_{tot} \qquad (6\text{-}1\text{-}10)$$

なので、全運動量 $\mathbf{P}_{tot}$ は重心の運動量 $\mathbf{P}_G \equiv M\dot{\mathbf{r}}_G$ (系の全質量と重心の速度をかけたものとして定義）に等しい。

$$\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_G \qquad (6\text{-}1\text{-}11)$$

よって、(6-1-4)式　$\dfrac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \mathbf{F}_{tot}^{ex}$　は

$$\frac{d\mathbf{P}_G}{dt} = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (6\text{-}1\text{-}12)$$

と書いても良い（これは(6-1-9)式と同じになる）。したがって、外力の総和がゼロならば、次の二つの事は同等である。

「重心の運動量は一定である（重心は等速直線運動する）」＝「全運動量が保存する」

6-1-2 二体問題における相対運動の方程式

続いて、相対運動について述べる。今、外力が全てゼロだとしよう。この場合は $\mathbf{F}_{tot}^{ex} = 0$ なので、当然、重心は等速直線運動をする。なので、この系の運動を議論する時、重心の運動についてはわかってしまったので、重心の運動は分離して考えて良いだろう。最終的に必要であれば、これから述べる相対運動と合わせて全体の運動を考えれば良い。

そこで、「相対位置ベクトル」を導入する。相対位置ベクトル $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (6\text{-}1\text{-}13)$$

のように定義する。6-1節の最初の図にあるように、このベクトルは質点１から質点２に向かうベクトルなので、質点１に乗っかって相手（質点２）を見た時の相手の位置を表すベクトルである。これは相対的に決まる位置なので、相対位置ベクトル、と名前がついている。

相対位置ベクトルの運動（時間変化）を調べてみよう。

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \qquad (6\text{-}1\text{-}14)$$

であるが、式(6-1-1)において、$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ とおき、外力がゼロであることを使うと、

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\mathbf{F}}{m_1}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}}{m_2} \qquad (6\text{-}1\text{-}15)$$

となる。式(6-1-15)と式(6-1-14）より相対位置ベクトルの運動を決める方程式は、

$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\mathbf{F}$ となる。これは、

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad (6\text{-}1\text{-}16)$$

というシンプルな形に書ける。ただし、μ は換算質量 (reduced mass) とよばれ、

$$\mu \equiv \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (6\text{-}1\text{-}17)$$

で定義される。(6-1-16)式は、質点１に乗っかって見た時の質点２の相対運動を決める運動方程式であるが、質量が m_2 ではなく換算質量に置き換わることに注意すれば、１体の運動方程式と同じ形をしている事がわかる。すなわち、２体の連立微分方程式(6-1-1)が重心の運動を決める方程式(6-1-9)と相対運動の方程式(6-1-16)に分離されたことになり、実質的に１体問題に還元されたと言える。

（補足）もし外力がゼロでない場合は、相対運動を決める方程式は、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\mathbf{F} + \left(\frac{\mathbf{F}_2^{ex}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1^{ex}}{m_1}\right) \qquad (6\text{-}1\text{-}18)$$

となり、やや複雑な形になる[5]。なお、外力がゼロでなくても、一様な重力のように「加速度が変化しないような外力」が働く場合には右辺の第２項はゼロになることに注意。この場合は換算質量を用いて、やはり (6-1-16)式の形にかける。

太陽と惑星のように、片方の物体の質量が十分大きい時 （例えば、$m_1 \gg m_2$ の時）、換算質量は $\mu \sim m_2$ となる。しかし、一般にはそうはならず、$m_1 = m_2$ ならば、$\mu = m_2/2$ となる。

---

5 この式を導け。

6.2　惑星の運動

　前節の結果を使って、太陽と惑星の２体問題を解くことにする。２体問題というものの、太陽の質量は惑星の質量よりはるかに大きいので換算質量は惑星の質量そのもので近似できる。したがって、近似的に、太陽の位置を原点におき（固定し）、惑星が万有引力場を受けて その周りを回る１体問題と考えて良い。さらに、万有引力は中心力なので、エネルギーが保存するとともに、前章で見たように、**角運動量が保存**する。これは、**惑星が常に角運動量ベクトルに垂直な平面を運動**することを意味する。したがって、惑星の運動方程式は**２次元極座標で記述できる**であろう。この節では、これらの事を順を追って述べ、運動方程式の解からKeplarの三法則を導くことができる事を示す。

6-2-1 ２次元極座標での惑星の運動方程式

　重心の運動を分離して、太陽と惑星の間の相対運動のみを議論することにする。外力による影響が無視できるとすれば、(6-1-14)式の一体問題を扱えば良い。

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} \approx m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

ここで換算質量 μ は、太陽の質量 M が惑星の質量 mより十分大きい[6]ので、 $\mu \approx m$ と近似した。

　$\mathbf{F}$ に万有引力を入れると、惑星の運動方程式は、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (6\text{-}2\text{-}2)$$

となる。$\mathbf{r}$ は太陽を原点として惑星の位置まで引いた相対位置ベクトルである。

　万有引力が中心力である事を使うと、原点のまわりの力のモーメント $\mathbf{N}$ はゼロとなり、回転の運動方程式 $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ (5-4-1)式より原点のまわりの角運動量 $\mathbf{L}$の時間変化はゼロになる。すなわち、角運動量 $\mathbf{L}$ は保存する。よって(5-4-7)で述べたように、惑星は常に$\mathbf{L}$に垂直な平面上を運動する。そこで、この平面に２次元極座標を取れば、(6-2-2)式は、動径方向の成分と偏角方向の成分で書くことができ(4-2-4)(4-2-5)式より、

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r = -G\frac{Mm}{r^2} \qquad (6\text{-}2\text{-}3)$$

$$ma_\varphi = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}4)$$

となる。ここで、力は $\mathbf{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r$ とも書ける（(5-4-6)式参照）ので動径方向成分 $F_r = -G\dfrac{Mm}{r^2}$しかなく、$F_\varphi = 0$ である。偏角方向成分の方程式はすぐに解けて、$r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const.}$となる。これに$m$をかけると、

$$|\mathbf{L}| = L = mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{const.} \qquad (6\text{-}2\text{-}5)$$

となり[7]、角運動量保存則が確かに成り立っていることがわかる。

---

[6] 太陽の質量は地球の質量の約333,000倍

[7] 演習８の問題４を見よ。

「惑星の運動の軌跡」を求めるには、動径方向の運動方程式を解く必要がある。

式(6-2-3)より、
$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}6)$$

となるが、式(6-2-5)から $\dot{\varphi} = \dfrac{L}{mr^2}$ である事を使い、$\dot{\varphi}$を消去すると、

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{m^2r^3} = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}7)$$

が得られる。この式は $r(t)$ を未知関数とする２階の微分方程式である。

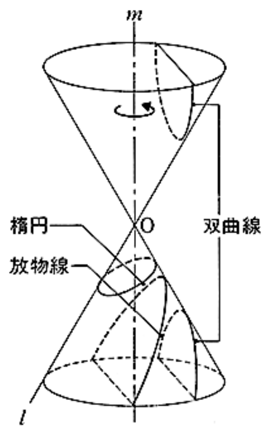
(6-2-7)を解けば$r(t)$が求まるのであるが、我々の関心は「惑星の軌跡」にあるから、$r(\varphi)$の形の解を求めたい。すなわち、動径 r が時間でどう変わるか、というより、動径 r が偏角 φ ごとにどのような値をとるかがわかれば、運動の軌跡を描くことができる。このように $r(\varphi)$ で軌跡を表す形を「極方程式」とか「極形式」と言うことがある。

（数学的準備）

例えば、楕円、放物線、双曲線などの二次曲線（まとめて**円錐曲線**(conic curve)という）は、

$$r(\varphi) = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \qquad (6\text{-}2\text{-}8)$$

の形で書ける。ここで、$\lambda(>0),\ \varepsilon(>0)$ は、それぞれ半直弦、離心率と呼ばれるパラメーターであるが、その値によって曲線の形が変わる。特に、ε のとる範囲によって、



$(\varepsilon = 0$	円）	
$0 < \varepsilon < 1$	楕円	
$\varepsilon = 1$	放物線	(6-2-9)
$\varepsilon > 1$	双曲線	

のように分類される（円を含めない場合もあるようである）。円錐曲線と呼ばれる由来は右図[8]のように円錐の切り口として上の曲線が出てくるからである。実際に式(6-2-8)が二次曲線を表していることは、この式を直交座標で書き直してみるとわかる[9]。

さて、次に、$r(\varphi)$ を求めるために、(6-2-7)を$r(t) \to r(\varphi(t))$と考えて合成関数の微分法により $r(\varphi)$ を未知関数とする微分方程式に直す。

最初に、$\dot{r}, \ddot{r}$ を変形する。r や$\dot{r}$ を時間微分するには、一旦、φ で微分しておいて、それにφの時間微分をかければ良いから、

$$\dot{r} = \frac{dr(\varphi(t))}{dt} = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \qquad (6\text{-}2\text{-}10)$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right)\right]\frac{d\varphi}{dt} \qquad (6\text{-}2\text{-}11)$$

となる。

---

8 図はデジタル大辞泉より

9 演習。式(4-1-1)の関係から出発する。

式(6-2-11)の最右辺の中の $\dfrac{dr}{dt}$ は(6-2-10)式の結果で置き換えて、

$$\ddot{r}=\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]\frac{d\varphi}{dt}=\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{mr^2}\right)\right]\frac{L}{mr^2}=\left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) \quad \text{(6-2-12)}$$

と書ける。ただし、式(6-2-5)から $\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{L}{mr^2}$ である事を使った。

ここで 動径の逆数 u なる変数を導入する。すなわち、

$$u\equiv\frac{1}{r} \qquad \text{(6-2-13)}$$

式(6-2-12)の最右辺に出てくる $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\varphi}$ は u を使うと

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=u^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{u}\right)=u^2\left(-\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{d\varphi}=-\frac{du}{d\varphi} \qquad \text{(6-2-14)}$$

となるので、式(6-2-12)は、

$$\ddot{r}=-\left(\frac{L}{m}\right)^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} \qquad \text{(6-2-15)}$$

となる。この結果を、元の形の方程式(6-2-7)に代入して、

$$-\left(\frac{L}{m}\right)^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u^2GM-\frac{L^2}{m^2}u^3=0 \quad . \qquad \text{(6-2-16)}$$

これを変形すると、シンプルな形の求める微分方程式、

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{GMm^2}{L^2} \qquad \text{(6-2-17)}$$

が得られる。この方程式を解いて $u(\varphi)$ を一旦求め、逆数をとって (6-2-13)式から最終的な解 $r(\varphi)$を求める手順となる。

(6-2-17)式は２階線形非同次（非斉次）常微分方程式と呼ばれる形になっている。(6-2-17)式で右辺＝０の場合は「同次方程式（斉次方程式）」と呼ばれる。(6-2-17)式の同次方程式はすぐに解けることがわかる。すなわち、同次方程式は

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=0 \qquad \text{(6-2-18)}$$

であるから、変数の記号が異なる（時間微分ではなく角度の微分になっている）事を除くと、「質量=1, ばね定数＝１の場合の調和振動子の方程式」と全く同じ形をしている。したがって、「同次方程式の一般解」 $u_h(\varphi)$[10] は、

$$u_h(\varphi)=A\sin\varphi+B\cos\varphi=C\cos(\varphi+\delta) \qquad \text{(6-2-19)}$$

である。ただし、$A/B=-\tan\delta,\ \ C=\sqrt{A^2+B^2}$.

[10] ここで、一般解 u_h の添え字 hは「均質」という意味の”homogeneous“の頭文字である。「同次」微分方程式を英語では”homogeneous differential equation”と言う。「非同次」は否定の接頭語”in”を先頭につけて”inhomogeneous“（不均質、不均一）という。同次、非同次の代わりに「斉次」とか「非斉次」という事もあるが、この方が英語の意味に近い。

ここでは、その証明はしないが、

「非同次方程式の一般解」＝「対応する同次方程式の一般解」＋「非同次方程式の特殊解」

となるので、後は (6-2-17)式の「特殊解」$u_p(\varphi)$[11] を一つでも探せば良い。$u_p(\varphi)$はすぐに見つかり、

$$u_p(\varphi) = \frac{GMm^2}{L^2} \qquad \text{(6-2-20)}$$

と選べば良い。(6-2-20)を元の方程式(6-2-17)に代入してみると、確かに(6-2-17)を満たしていることがわかる。

よって、(6-2-17)の一般解は、

$$u(\varphi) = C\cos(\varphi + \delta) + \frac{GMm^2}{L^2} \qquad \text{(6-2-21)}$$

となる。$u = 1/r$ であるから、

$$r(\varphi) = \frac{1}{C\cos(\varphi+\delta) + \frac{GMm^2}{L^2}} = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \frac{L^2C}{GMm^2}\cos(\varphi+\delta)} = \frac{\lambda}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\delta)} \qquad \text{(6-2-22)}$$

が得られた。ここで、$\lambda = \dfrac{L^2}{GMm^2},\ \varepsilon = \dfrac{L^2C}{GMm^2}$ (6-2-23)

式(6-2-22)において、δ は極座標の座標軸をどう取るかで決まる。今、$\varphi = 0$ で r が最小（近日点という）であるようにしよう（次節の図を見よ）。そうするためには$\varphi = 0$で(6-2-22)の分母が最大になる必要がある。すなわち $\cos(\varphi+\delta)$ が最大になる必要がある。このためには $\delta = 0$ と選べば良い。この時、逆数である u は最大なので、$\left.\dfrac{d^2u}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = -C < 0$ でなければならない。よって$C > 0$ なので、(6-2-23)より、$\lambda > 0,\ \varepsilon > 0$ が得られる。こうして、解は円錐曲線(6-2-8)式

$$r(\varphi) = \frac{\lambda}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad \text{(6-2-24)}$$

となることがわかった。

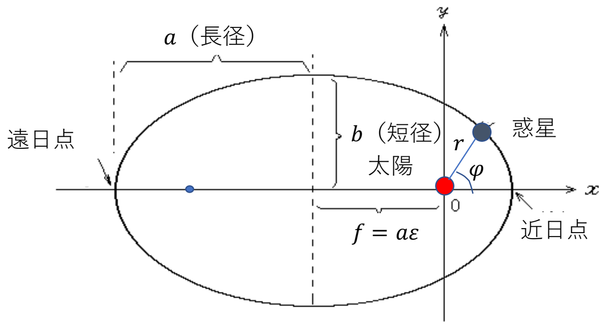
結局、太陽の周りの天体の運動は円錐曲線で表される。ただし、惑星の運動は、閉じた軌道を持っているので r は有限でならねばならず、(6-2-24)式の分母がゼロになってはいけない。このためには、$\varepsilon < 1$ の必要がある[12]ので(6-2-9)より楕円運動となる。

[11] 特殊解 u_p の添え字のpは”particular”の意味。

[12] cosΦは-1から＋１の間の値をとるので、εが１以上であれば分母が０になる場合が出てくる。この場合、rは無限大になってしまう。よって惑星のように有限の動径 r を持つためにはε<1でなくてはならない.

6.3　ケプラーの法則

　　ケプラー（Kepler 1571-1630）はティコ・ブラーエ(Tyco Brahe 1546-1601)の膨大な惑星運行に関する観測データを解析し、以下の３つの運動法則にまとめあげた。これをKeplerの法則という。これらの法則は全て、前節の運動方程式の解から導ける。



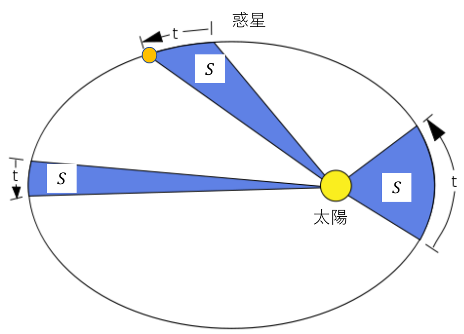
第１法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円運動をする。

　　焦点は右図のように楕円の中心からx 軸正負の方向に

$$f \equiv a\varepsilon \qquad \text{(6-3-1)}$$

の距離にある点で定義される（一つの楕円に２つある）。ここで、a は長径で ε は前節で出てきた離心率である。惑星の運動が楕円軌道になることはすでに前節で示した。焦点の位置に太陽があることは(6-2-24)式を直交座標で表してみるとわかる（演習９、問題４の(3)参照）

　　万有引力は(3-20)式のようにr に依存する部分の関数形が、$f(r) = -G\dfrac{Mm}{r^2}$ であって、距離の２乗に反比例している形を持っている。しかし、もしそうでない形の力の場合（例えば逆３乗に比例する場合）でも楕円運動（あるいは二次曲線の運動）をするであろうか。少なくとも、中心力であれば $f(r)$ の形によらず 角運動量は保存し平面運動をする。しかし、逆２乗の時のように楕円軌道になるとは限らず、むしろ一般的には軌道が閉じないことが知られている。



第２法則：惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間に掃く面積は一定（面積速度一定）。

　　右図のように、太陽に近いところでは惑星の速度は速く、遠いところでは遅くなる。しかも、一定時間にスィープする（掃く）面積 S は同じになる。これは、すでに5.3節（p45の下の図）で議論したように、角運動量が保存することに由来する。面積速度は $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ なので[13]、「面積速度一定」と「角運動量保存則」は全く同等である事を示すことができる[14]。従って、中心力でありさえすればケプラーの第２法則は成り立つので、力が逆２乗則であることには依存しない。

第３法則：公転周期 T の２乗は楕円軌道の長径 a の３乗に比例する。

$$T^2 \propto a^3 \qquad \text{(6-3-2)}$$

これは、公転周期が楕円の面積を面積速度で割ったものである事を使うと証明できる[15]。惑星の軌道が楕円である事を使うので、この法則は万有引力が逆２乗である事に依存している。

---

13 演習

14 演習

15 これも演習

演習9

1. 惑星(質量 m)と太陽(質量 M)の二体問題を考える。講義と異なる方法(エネルギーを時間微分する方法)で動径方向の運動方程式を導いてみよう。また、運動方程式を解かずにどのような運動が可能か調べる。まず、換算質量 $\mu \sim m$ なので、力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r} \qquad \text{(演-1)}$$

と書ける。以下の問に答えよ。

(1) E は2次元の極座標で表すと

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \qquad \text{(演-2)}$$

と書ける事を示せ。ただし、$L = mr^2\dot{\varphi}$ （(6-2-5)式）である。

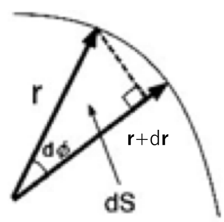
(2)エネルギー保存則は $\frac{dE}{dt} = 0$ と書ける。(演-2)式を時間微分して、動径方向の運動方程式(6-2-7)、

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{m^2r^3} = 0 \qquad \text{(演-3)}$$

を導け。

(3) 有効ポテンシャル　$U_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ を定義すると、惑星の運動は（演-2)式より、あたかも、$U_{eff}(r)$ の下で１次元運動しているように見做すことができる。縦軸をエネルギー、横軸を r として$U_{eff}(r)$の概略の形を書きなさい。また、E の大きさを、$E > 0,\ E = 0,\ E < 0$とした時、それぞれどのような運動に対応するか調べなさい。（これを「有効ポテンシャルの方法」、と言う。）

2. Kepler の第 2 法則は面積速度一定であることを述べている。図を参考にして、 面積速度が$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$であることを求め、面積速度一定が角運動量保存と同等であることを示せ。



3. Keplerの第３法則は公転周期 T の２乗が楕円軌道の長径 a の３乗に比例することを述べている。以下の設問に答えよ。

(1) T は楕円軌道に囲まれた面積を面積速度で割ったものであることを説明せよ。

(2) 面積速度は$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{GM\lambda}$ と書けることを示せここで、$\lambda = \frac{L^2}{GMm^2}$である（式(6-2-23)）。

(3) 楕円の面積がπabであることと、$b = \sqrt{a\lambda}$ である事を使いKeplerの第３法則を導け。

4. 極方程式の式 $r(\varphi) = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ を２次元の直交座標で表したい。$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を使って、以下のことを導け。

(1)　極方程式の式は $(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon\lambda x + y^2 = \lambda^2$ と書ける（二次曲線）。

(2)　$\varepsilon = 1$ の時、放物線の式、$x = -\frac{1}{2\lambda}y^2 + \frac{\lambda}{2}$ になる

(3)　$0 < \varepsilon < 1$ の時、楕円の式、$\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ になる。ただし、$a = \frac{\lambda}{(1 - \varepsilon^2)},\ b = \frac{\lambda}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}$